

## 格子QEDにおけるクォークフレーバー数依存性

高見 彰良\* 橋本 貴明\*\* 堀邊 稔\*\* 林 明久\*\*

### The Dependence on the Number of Quark Flavours in Lattice QED

Akiyoshi TAKAMI, Takaaki HASHIMOTO, Minoru HORIBE and Akihisa HAYASHI

(Received Aug. 28, 2000)

The dependence on the number of flavours in lattice QED with our new fermion action is investigated by Monte Carlo simulations. This action possesses the discrete chiral symmetry and provides  $2^D$ -component fermions, which should be compared with  $2^{1+D}$ -component fermions of the staggered fermion action. We also show the property of the fermion determinant in detail since the numerical feasibility relies on it.

**Key Words :** QED, Fermion, Gauge, Transition, Chiral

## 1 導入

もともと量子場の理論で厳密に解ける問題は限られているために数値的に解く試みが、統計力学的な方法によって非摂動的に解を求めることが期待される格子ゲージ理論を用いた数値シミュレーションである。しかしながら、Nielsen-Ninomiya 理論 [1] によると、格子上にフェルミオン場を形成するときに、我々は必ずある問題の困難さに直面する。それ

---

\* 大学院工学研究科物質工学専攻

\*\* 工学部物理工学科

は、フェルミオンを格子上に形成するとき、非物理的な余分な粒子が生まれる（フェルミオン・ダブリング）か、カイラル対称性が損なわれる、というものである。

この困難を扱うためにいくつかの方法が提案されている。実際のシミュレーションにおいてもっともよく使われているもののひとつである Wilson フェルミオン作用 [2] は、naive な連続極限で無視できるホッピング・パラメータと呼ばれる係数  $\kappa$  をもつ項を導入することでフェルミオン・ダブリングの問題を回避しているが、カイラル対称性を犠牲にしている。もうひとつの方法は、Kogut と Susskind によって提案された staggered フェルミオン作用 [3] である。この方法はダブリングによって生じた非物理的なフェルミオンを別の種類のフェルミオンと見なすものである。このため、この形式でフェルミオン作用を記述したときは、 $1+D$  次元において、 $2^{(1+D)/2}$  重に縮退したフェルミオンをもつものとする。さらに、最近 Ginsparg-Wilson 関係 [4] を満足するフェルミオン作用は明確にカイラル対称性を持ち、Wilson フェルミオン作用と同様にフレーバー数に制限を受けない。しかしながらこの作用は ultra-local の性質 [5] をもたず、このために実際のシミュレーションが困難になる。

さて、我々が最も興味を持っているのは、ゲージ粒子とダイナミカルなクォークが結合するとき、相転移になにが起こるのか、である。というのも、クォークが存在することでカイラル相転移が引き起こされると期待されるからである。

現在、この方向の研究でもっともよく用いられるのは、staggered フェルミオン作用であるが、その理由は次の通りである。先に述べた staggered フェルミオン作用においてカイラル極限はクォーク質量が消える極限で実現できる。そして、これは Wilson フェルミオンに対して要求されるようななどのようなパラメータも必要とされことなく、自発的カイラル対称性の破れや関連した Goldstone 現象を研究することができる。一方、Wilson フェルミオン作用は明確にカイラル対称性を破っており、そのためにまずパイオン質量が消滅するホッピング・パラメータ  $\kappa$  の臨界値を探し、その値を用いてカイラル極限を実現させる。しかしながら、その臨界値は異なった  $\kappa$  についてゲージ場の配位のアンサンブルを生成させ、外挿によって  $\kappa_{\text{cr}}$  を決定しなければならない。この手続きは、自明なことではなく、膨大な時間を浪費する。また、理論的な見地から、3 重またはそれ以上に縮退した質量ゼロのクォークに対しては一次の相転移が起こり、カイラル対称性が回復するという一般的な議論が存在するが、このことも  $1+3$  次元において 4 フレーバーを作り出す staggered フェルミオン作用を扱うことを支持する。これらの理由から staggered フェルミオンはカイラル相転移の研究によく用いられている。

しかしながら、上で述べたようにクォークが 4 重に縮退した状況はあまり現実的ではない。まず十分大きい質量を持つクォークに対しては、そのクォークの存在はピュア・ゲージの場合から得られる結果にほとんど影響を与えない、という事実がある。次に、数 MeV

のオーダーのアップ・クォーク、ダウン・クォーク、そしてそれらの20倍程度の質量を持つより重いストレンジ・クォークの存在を考慮しなければならない。実際には、それらよりさらに重いチャーム・クォーク、トップ・クォーク、そしてボトム・クォークが存在するが、これらが相転移に与える影響はほとんど無視できる。そしてこれはまた、ストレンジ・クォークに対しても真実である。したがって、第一次近似として、2つの軽いおよそその質量が縮退したと見なせるクォークを持つ量子色力学 (QCD) がより現実的であり、またこれを研究することが重要である。

最近の論文 [6, 7] で、我々は  $1+D$  次元格子における新しい形式のフェルミオン作用を提案した。この作用は離散化されたカイラル対称性と ultra-local 性を保有し、そのフェルミオンはボゾン形式の分散関係を満たす。この意味において、プロパゲータに余分な極が存在せずダブリング問題を回避している。この形式に従うフェルミオンはユークリッド空間において、 $2^D$  成分を持つ。これは staggered フェルミオン作用を用いた場合の  $2^{(1+D)}$  成分と比較されるべきである。

これらの性質は、すなわち、我々の方法も staggered フェルミオンと同じく、Wilson フェルミオンのようなパラメータを必要とすることなくカイラル性を調査でき、 $1+3$  次元において staggered フェルミオンが作り出す4フレーバーの状況よりも現実的な2フレーバーの状況を直接扱うことが可能であることを示す。これらの理由から、我々のフェルミオン作用を使用するメリットは大きい。

最終的な目標は QCD においてダイナミカルなフェルミオンが導入されたとき、相転移が起こる温度がゲージ場のみ場合、すなわちピュア・ゲージの場合のそれより低く、その傾向がフレーバー数が多くなるほど小さくなる、という性質を新しいフェルミオン作用を用いて検証し、定量的にフレーバー数に対する相転移点の移動を調査することである。しかし、この論文においては数値シミュレーションの実行時間を考慮して、我々はまず我々が提案した新しい作用とその性質を紹介し、 $1+3$  次元量子電磁気学 (QED) における相転移のフレーバー数依存性を調査する。

## 2 新しいフェルミオン作用の行列式

ダイナミカルなフェルミオンを導入したときの数値的な扱いやすさは、そのフェルミオン作用の行列式の性質に強く依存している。そこで、QED におけるクォークフレーバー数依存性を研究する前に、最近の論文 [8] で報告した我々のフェルミオン行列式の性質を述べる。

まず、我々の新しい作用の形式を簡単に述べる。その作用は行列  $\Lambda$  を用いて、

$$S_f = \sum_{m,n} \psi_m^\dagger \Lambda_{m,n} \psi_n \quad (1)$$

と表せる。ここで、和は格子点とスピン成分のものである。そして我々のフェルミオン行列は

$$\Lambda = 1 - S_0^\dagger U_E \quad (2)$$

のように定義される。ここで、 $U_E$  はユークリッド時間発展演算子であり、 $S_\mu$  は単位移動演算子で

$$S_\mu \psi(x^0, x^1, \dots, x^\mu, \dots, x^D) = \psi(x^0, x^1, \dots, x^\mu + 1, \dots, x^D) \quad (\mu = 0, 1, \dots, D) \quad (3)$$

と定義される。プロパゲータが余分な極を持たないことを要求すると、 $U_E$  は

$$U_E = 1 - \sum_{i=1}^D \frac{r_E}{2} \left\{ iX_i (S_i - S_i^\dagger) + (1 - Y_i) (S_i - 2 + S_i^\dagger) \right\} \quad (4)$$

のように書ける。ここで  $r_E$  は時間方向と空間方向の格子間隔の比を表し、スピン成分に関する行列である  $X$  と  $Y$  が次の代数を満足するべきであることが要求される。

$$\begin{cases} \{X_i, X_j\} = \frac{2}{r_E} \delta_{ij}, \\ \{X_i, Y_j\} = 0, \\ \{Y_i, Y_j\} = 2 \left( \frac{1}{r_E} \delta_{ij} + 1 \right) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, D) \quad (5)$$

行列  $2(\delta_{ij}/r_E + 1)$  は任意の正の  $r_E$  に対して正であり、それゆえ  $X$  と  $Y$  はエルミートと仮定できる。

$$X_i^\dagger = X_i, \quad Y_i^\dagger = Y_i. \quad (6)$$

この行列  $X$  と  $Y$  は Clifford 代数  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2D}$  を用いて

$$X_i = \frac{\Gamma_i}{\sqrt{r_E}}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^D \alpha_{ij} \Gamma_{D+j} \quad (7)$$

のように表せる。ここで

$$\Gamma_i^\dagger = \Gamma_i, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 2D) \quad (8)$$

であり、 $\alpha_{ij}$  は実定数である。 $\Gamma$  に対する規約表現の次元が  $2^D$  であり、したがってフェルミオン場が  $2^D$  成分となる。

ゲージ場との相互作用を考えるときは、単位移動演算子を

$$S_\mu \rightarrow S_\mu(x) \equiv U_{x, x+\hat{\mu}} S_\mu \quad (9)$$

のように置き換えることで実現できる。ここで、 $\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向に沿った単位ベクトルであり、 $U_{x,y}$  は格子点  $x$  と  $y$  をつなげているリンク変数である。この置き換えにより、フェルミオン行列と時間発展演算子はそれぞれ次のようになる。

$$\Lambda(x) = 1 - S_0^\dagger(x) U_E(x), \quad (10)$$

$$U_E(x) = 1 - \sum_{i=1}^D \frac{\tau_E}{2} \left\{ iX_i \left( S_i(x) - S_i^\dagger(x) \right) + (1 - Y_i) \left( S_i(x) - 2 + S_i^\dagger(x) \right) \right\}. \quad (11)$$

さて、具体的に QED における行列式の性質を考える。まず、近接した 2 つの格子点  $x$  と  $x + \hat{\mu}$  を繋げるリンク変数を  $U_{x, x+\hat{\mu}}$  のように記す。今考えるゲージ群は  $U(1)$  であるからリンク変数は

$$U_{x, x+\hat{\mu}} = e^{i\theta_\mu(x)} \quad (12)$$

と書ける。ここで  $\theta_\mu(x)$  は compact な領域  $[0, 2\pi)$  に限られる。このとき、単位移動演算子の行列式は  $N_T$  と  $N_s$  をそれぞれ時間方向の格子サイズ、スピン成分の数としたとき、

$$\begin{aligned} \det S_0(x) &= \prod_{\mathbf{x}} \left[ (-1)^{N_T} \exp \left\{ i \sum_{t=1}^{N_T} \theta_0(t, \mathbf{x}) \right\} \right]^{N_s} \\ &= \exp \left\{ i N_s \sum_t \sum_{\mathbf{x}} \theta_0(t, \mathbf{x}) \right\} = e^{i\alpha} \end{aligned} \quad (13)$$

と書ける。ここで  $\alpha$  は

$$\alpha = N_s \sum_t \sum_{\mathbf{x}} \theta_0(t, \mathbf{x}) \quad (14)$$

のように定義される。特に  $1+1$  次元では、 $\det U_E(x) = 1$ 、 $U_E(x)$  のエルミート性や  $\Gamma_3 U_E(x) \Gamma_3 = U_E^{-1}(x)$  なる性質が存在し、これらを用いて

$$(\det \Lambda(x))^* = e^{i\alpha} \det \Lambda(x) \quad (15)$$

が得られる。結果として、 $1+1$  次元 QED の場合において我々のフェルミオン行列式は

$$\alpha = 2\pi n \quad (n: \text{整数}) \quad (16)$$

の条件を課すことで実数値に制限できる。

今、我々は式 (16) によって特定された条件を「GT-condition」と呼ぶ。これは、大局的に (Globally) に時間方向 (Temporal) のリンク変数を  $\sum_x \theta_0(x) = \pi n$  のように制限した状況を示し、無限系の格子上においてこの条件はゲージ変換によって達成される。また、上の条件のなかの特別な場合  $\theta_0(x) = 0$  として「T-condition」を定義する。これは、無限系の格子における temporal gauge condition に対応するものである。

一見、行列式が  $\alpha$  依存性を持つことは奇妙に思われるかもしれない。しかしながら、これは有限サイズ格子においては真実である。なぜならば、無限サイズ格子においてのすべてのゲージ変換は、周期境界条件を持つ有限サイズ格子において許されないからである。したがって、この依存性は格子の有限性から生ずるものである。例えば、 $\sum_t \theta_0(t, \mathbf{x})$  は周期境界条件を持つ有限サイズ格子において任意のゲージ変換の下で不変である。temporal gauge condition (有限サイズ格子における T-condition に対応) は無限サイズ格子においては確かに矛盾の無いゲージであるが、有限サイズ格子においてはそうではない。しかしながらこの制限は、我々が有限サイズの格子によって無限系を近似するときに、全くの人工物として現れる。我々は次のように考える。無限系が与えられたとき、我々は temporal gauge condition を課す。これは全く問題無い。そのとき、我々は、元の系全体の近似として、そのなかから有限の空間を切り出す。この2つの系の違いはサイズと境界条件であり、その有限な空間が無限の大きさの極限を持つときには現れないものである。同じことが GT-condition についても言える。したがって、フェルミオン行列式はゲージ変換の下で不変であるが、その行列式は我々の「ゲージ条件」、すなわち、T-condition や GT-condition には依存する。先に述べたようにこれら条件下で我々のフェルミオン行列式は実数値になり、さらにこれらのフェルミオン行列のスペクトラム解析からほとんどの配位においてその行列式が正值となることが理論的に説明されている [6]。

実際に、図 (1.a)～図 (1.c) に 1+1 次元 QED における我々のフェルミオン行列式の複素平面上の分布を示す。ここに示したデータはある  $\beta$  において、2000 回の熱化の後の 2000 回の行列式の値の観測結果である。図 (1.a) はリンク変数に何も制限を与えていない場合を表し、原点を中心にしてドーナツのような構造をしている。これは先に述べたように位相に制限がないことに原因がある。一般的にサンプリング回数が多ければ多いほど収束性が良くなるが、この場合ドーナツの穴のなかに行列式の期待値があり、このために任意の観測量に対しての収束性が非常に悪いことが予想される。一方、図 (1.b) と 図 (1.c) はそれぞれ T-condition と GT-condition の結果であるが、それぞれ理論的に示されているようにその行列式の値は実数であり、また正である。

このように U(1) ゲージ理論に我々の新しい作用を適用させたとき、T-condition や GT-condition を課すことによって行列式の性質を改善できる。この立場をはっきりさせ

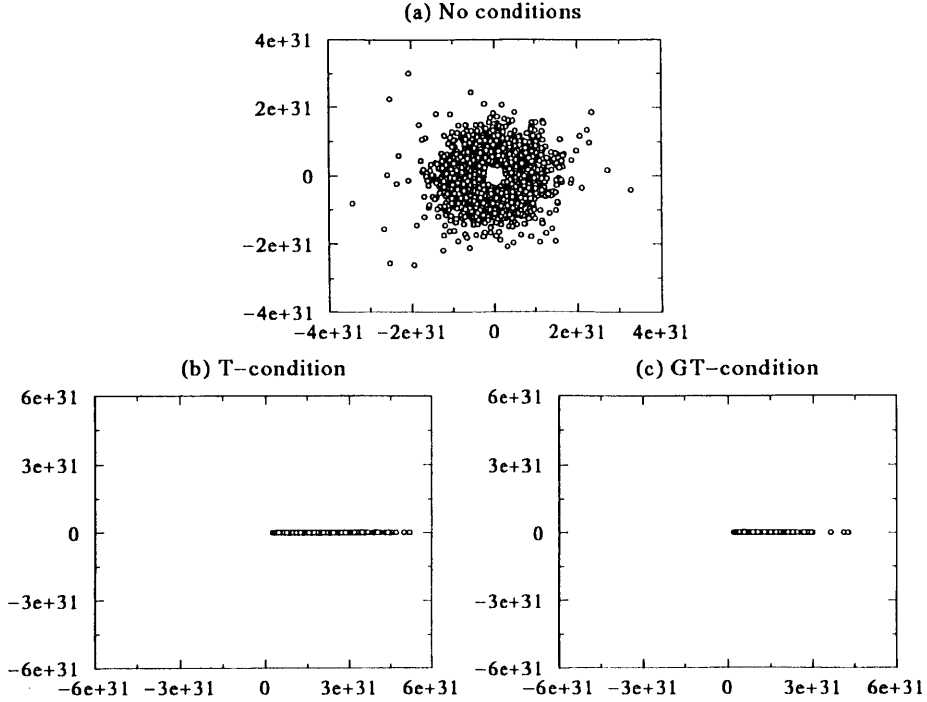


図 1: 1 + 1 次元 QED における新しいフェルミオン行列式の複素平面上の分布

るために、例えば以下のような観測量を考える。

$$\langle \psi(y) \psi^\dagger(y') \rangle = \frac{\int d\psi d\psi^\dagger dU \psi(y) \psi^\dagger(y') e^{-S_g - S_f}}{\int d\psi d\psi^\dagger dU e^{-S_g - S_f}} \quad (17)$$

ここで、 $S_g$  はゲージ場に対する作用で、それから  $d\psi$ 、 $d\psi^\dagger$  そして  $dU$  はそれぞれ  $\prod_{x,\alpha} d\psi_\alpha(x)$ 、 $\prod_{x,\alpha} d\psi_\alpha^\dagger(x)$  そして  $\prod_{x,\mu} dU_{x,x+\hat{\mu}}$  を表す。この式を  $\psi(x)$  と  $\psi^\dagger(x)$  について積分すると

$$\langle \psi(y) \psi^\dagger(y') \rangle = \frac{\int dU \det(1 - S_0^\dagger(x) U_E(x)) (1 - S_0^\dagger(x) U_E(x))_{y,y'}^{-1} e^{-S_g}}{\int dU \det(1 - S_0^\dagger(x) U_E(x)) e^{-S_g}} \quad (18)$$

となる。今、新しい変数  $\Theta$  と  $\tilde{\theta}_0(x)$  をリンク変数  $U_{x,x+\hat{0}} = e^{i\theta_0(x)}$  のかわりに

$$\theta_0(x) = \Theta + \tilde{\theta}_0(x) \quad (19)$$

のように導入し、

$$\int \prod_x d\tilde{\theta}_0(x) d\Theta \delta\left(\sum_x \tilde{\theta}_0(x)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \prod_x d\theta_0(x) d\Theta \delta \left( \sum_x \theta_0(x) - N_T N_X \Theta \right) \\
&= \frac{1}{N_T N_X} \int \prod_x d\theta_0(x)
\end{aligned} \tag{20}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
&\langle \psi(y) \psi^\dagger(y') \rangle \\
&= \frac{\int d\tilde{U} d\Theta \delta \left( \sum_x \tilde{\theta}_0(x) \right) \det \left( 1 - e^{i\Theta} \tilde{S}_0(x)^\dagger U_E(x) \right) \left( 1 - e^{i\Theta} \tilde{S}_0(x)^\dagger U_E(x) \right)^{-1}_{y,y'} e^{-\tilde{S}_\theta}}{\int d\tilde{U} d\Theta \delta \left( \sum_x \tilde{\theta}_0(x) \right) \det \left( 1 - e^{i\Theta} \tilde{S}_0(x)^\dagger U_E(x) \right) e^{-\tilde{S}_\theta}}
\end{aligned} \tag{21}$$

となる。ここで、 $\tilde{S}_0(x)$  は、 $\theta_0(x)$  を  $\tilde{\theta}_0(x)$  に置き換えたものであることを示す。

さて、ここで上式の行列式  $\det(1 - e^{i\Theta} \tilde{S}_0(x)^\dagger U_E(x))$  の位相が、0 から  $2\pi$  の間の任意の値をとることができることに注意しなければならない、このことは  $\det(1 - e^{i\Theta_n} \tilde{S}_0(x)^\dagger U_E(x))$  のランダムに生成される  $\Theta_n (n = 1, 2, \dots)$  についての和が偶々キャンセルされ、このとき上式の分母が非常に小さくなる可能性があることを意味する。このために、数値シミュレーションにおいて不安定な振舞いをするのが予想され、 $\Theta$  に対して何らかの制限を与える必要がある。先に示した T-condition や GT-condition は  $\Theta$  をゼロに固定することに対応し、実際にその行列式の値の分布は大きく改善されている。

1+3 次元 QED について、我々は行列式の実数性や正值性を証明することはできない。しかしながら、上の議論はどのような次元についても適用できるので、我々の方法は時間方向のリンク変数に制限を加えることで、何も制限を加えない場合よりも安定した収束性が得られることが期待できる。実際に、数値シミュレーションから得られた 1+3 次元 QED における行列式の複素平面上の分布を示したものが、図 (2.a)～図 (2.c) である。それぞれ、図 (2.a) がリンク変数になにも制限を与えていない場合、図 (2.b) が T-condition、そして図 (2.c) が GT-condition の結果を示す。やはり、1+1 次元 QED の場合と同様にリンク変数に何も制限を加えてない状態では、原点を中心に全ての位相角に行列式の値が分布している。T-condition と GT-condition においては、その分布からわかるように行列式の値は実数ではないが、その値の位相角は小さい。このように位相角が十分小さければ、我々は行列式の値の位相因子を無視して、数値シミュレーションから生成される行列式の値の代わりにその値の絶対値を用いる事が許されるかもしれない。

ここで T-condition と GT-condition の違いについて少し議論する。我々は GT-condition は T-condition よりも条件が弱いために前者の方が数値シミュレーションに適している、と考える。実際に、今、3 種類の条件の下で行なった 1+3 次元 QED ピュア・ゲージの数値シミュレーションの結果として、 $\beta$  に関するブラケット・エネルギーの期待値のグラフ



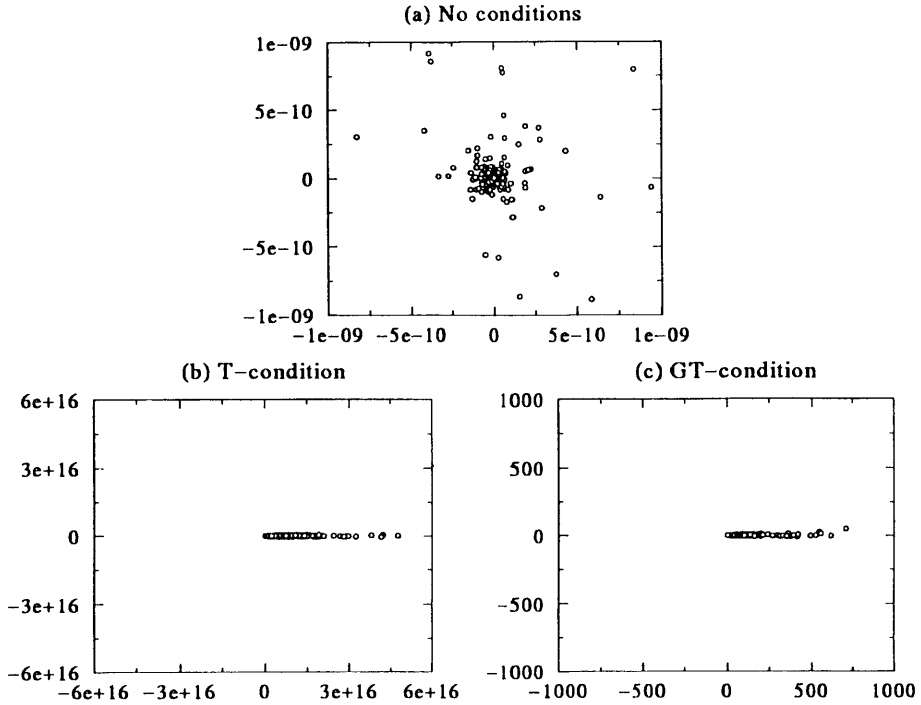


図 2: 1 + 3 次元 QED における新しいフェルミオン行列式の複素平面上の分布

を図 (3) に示す。ブラケットとは格子上の一番小さい正方形のことであり、ブラケット・エネルギーとはそのブラケットに沿ったリンク変数の順序づけられた積を表す。また、このブラケット・エネルギーとはゲージ場のもつエネルギーに関係しており、相を区別するときにも使われるパラメータである。

我々は次の形式を用いて、 $\beta$  に関するブラケット・エネルギーの期待値を観測した。

$$\langle O \rangle = \frac{\int dU d\psi d\psi^\dagger O e^{-S_g - S_f}}{\int dU d\psi d\psi^\dagger e^{-S_g - S_f}} = \frac{\int dU O \det \Lambda(x) e^{-S_g}}{\int dU \det \Lambda(x) e^{-S_g}} = \frac{\langle O \det \Lambda(x) \rangle_0}{\langle \det \Lambda(x) \rangle_0}. \quad (22)$$

ここで、 $O$  は任意の観測可能な物理量である。

図 (3) において GT-condition のラインはリンク変数になにも制限を与えていない場合のラインとほぼ一致しているが、T-condition のラインは全体的に値が上方にシフトしており、さらに相転移点のはっきりずれていることが確認できる。予想されるようにこの違いはそれぞれの条件のサイズ効果の違いから生ずるものである。

特に、リンク変数になにも制限を与えていない場合との違いが大きい T-condition に注目し、その条件の下で格子サイズを変えてみた結果が、図 (4) である。この図が示すよ

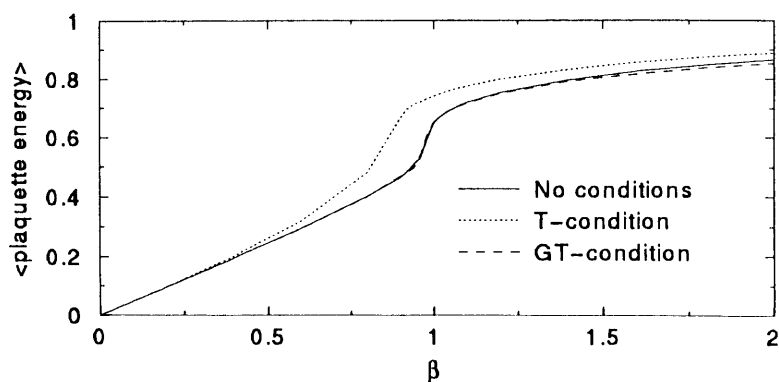


図 3: 1 + 3 次元 QED ピュア・ゲージにおけるプラケット・エネルギーの  $\beta$  に対する変化

うに格子サイズを大きくすることによってピュア・ゲージとの差が小さくなることがわかる。

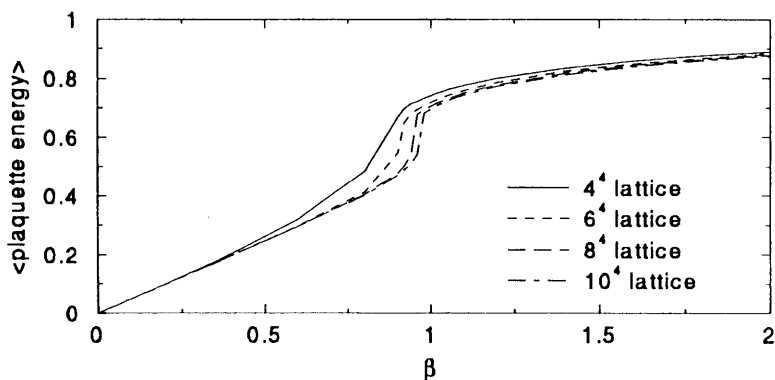


図 4: T-condition におけるプラケット・エネルギーの格子サイズ依存性

したがって、我々は有限サイズ格子において、GT-condition のほうがよりよい性質を持つと結論する。すなわち、GT-condition の下において我々のフェルミオン行列式の期待値は収束性がよく、サイズ効果が小さい。このことは、特に、ダイナミカルなフェルミオンがゲージ粒子と結合した場合に得られる相転移点とピュア・ゲージの場合に得られる相転移点との微妙な違いを厳密に調査する場合に重要な性質である。

### 3 フレーバー数依存性

1 + 3 次元 QED における相転移のフレーバー数依存性を観測するまえに、我々は相転移が存在しない 1 + 1 次元 QED において、フレーバー数が観測量にどのような影響を与えるかを述べる。ここで用いた我々の新しいフェルミオン作用の結果は、前節でサイズ効果が小さいことを検証した GT-condition を用いたものである。

1 + 1 次元において我々の新しいフェルミオン作用が作り出すフェルミオン成分の最小値は  $2^1 = 2$  であり、1 フレーバーのクォークから扱える。一方、staggered フェルミオン作用のそれは、 $2^{1+1} = 4$  であり、扱えるクォークの最小単位として 2 フレーバーからしか扱うことが許されない。しかしながら、staggered フェルミオン作用を用いながら 1 フレーバーを扱う処方がある。その処方を理解するために、まず Wilson フェルミオン作用のように任意の次元で 1 フレーバーを扱う作用を考え、そのフェルミオン行列式を  $K$  とする。次に質量が縮退したクォークの  $N_F$  フレーバーの場合を考える。この場合のフェルミオン作用は

$$S_f = \sum_{m,n} \psi_m^\dagger K_{m,n} \delta_{F'F} \psi_n^F \quad (23)$$

のように書ける。ここで、添字  $F$  はフレーバーの自由度を表し、 $K_{m,n}$  はフレーバーに依存しないとした。この作用を用いたとき、任意の観測量  $O$  に対し次の式を得る。

$$\langle O \rangle = \frac{\int dU O (\det K)^{N_F} e^{-S_g}}{\int dU (\det K)^{N_F} e^{-S_g}} \quad (24)$$

この式から、1 フレーバーを扱う作用において質量が縮退した  $N_F$  個のクォークを扱うときは、行列式を  $N_F$  乗したものに置き換えればよいことがわかる。さて、1 + 1 次元の staggered フェルミオン作用は上で述べたように、扱えるクォークの最小単位は 2 フレーバーである。そこで、1 フレーバーを実現させたいときには、式 (24) において単純に  $N_F = 1/2$  と置いてしまう。つまり行列式の値の平方根をとることで、疑似的に 1 フレーバーを扱っていると考えるのである。すなわち、この処方は厳密に 1 フレーバーを扱うものではなく、非自明である。

さて、図 (5) は 1 + 1 次元 QED におけるブラケット・エネルギーのフレーバー依存性を表す。この図のラインは下からクォークが存在しない状態であるピュア・ゲージ、1 フレーバーをもつ新しいフェルミオン作用、1 フレーバーをもつ状態に対応 staggered フェルミオン作用、2 フレーバーをもつ staggered フェルミオン作用を用いた場合のブラケット・エネルギーの期待値を表す。また、括弧の中の値がそれぞれのフレーバー数を表す。この図から定性的に、フレーバー数が増えるにつれてブラケット・エネルギーのラインが左

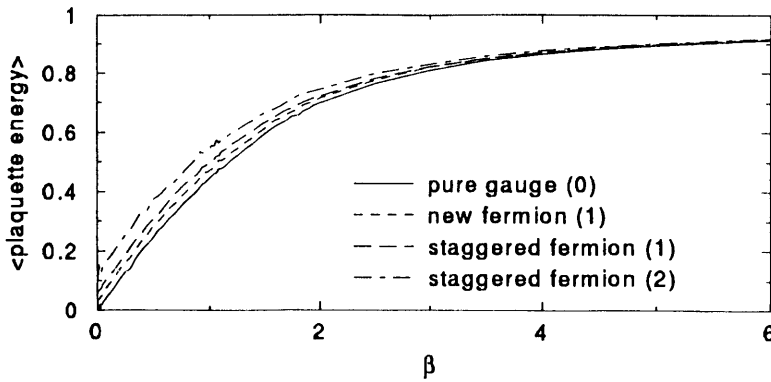


図 5: 1+1 次元 QED におけるプラケット・エネルギーのフレーバー依存性

側にシフトしていることがわかる。プラケット・エネルギーはクォークと反クォーク間のポテンシャル・エネルギーに対応するが、ダイナミカルなフェルミオンが導入されることによってクォークと反クォークがたやすく生成・消滅することになることから、ポテンシャル・エネルギーが弱まることを意味している。また、フェルミオン行列式から生ずるリンク変数がつくるプラケットが、ピュア・ゲージにおけるプラケット・エネルギーの期待値に付加されていると考えられる。これは特に強結合領域の極限、すなわち  $\beta \rightarrow 0$ 、において、プラケット・エネルギーの期待値はフェルミオン行列式から生じる値のみを反映している。 $\beta = 0$  点に注目すれば、プラケット・エネルギーの期待値が大きいほどフレーバー数も大きいという結果もこれを支持するものである。

ただ、我々は、新しいフェルミオン作用によって求めた結果と同じフレーバー数を扱う staggered フェルミオン作用とのラインの差に注目しなければならない。これは、前者が厳密に 1 フレーバーを扱っているのに対して、後者が疑似的にしか 1 フレーバーを扱っていないことからくると考えられる。

次に、1+3 次元 QED におけるプラケット・エネルギーのフレーバー依存性を表す図 (6) を示す。全体的に 1+1 次元の場合と同様にフレーバー数が多いほど左側にシフトしている傾向がある。しかしながら、クォークが存在しない状態のピュア・ゲージと 2 フレーバーをもつ新しいフェルミオン作用の場合との差はほとんどない。1+1 次元の場合と比べれば  $\beta = 0$  点におけるフレーバー数の影響が少ないことから考えて、全体的に 1+1 次元の場合よりもフレーバーの影響が小さいことが予想される。また、格子サイズを大きくすることで staggered フェルミオン作用を用いて求められた期待値が新しいフェルミオン作用やピュア・ゲージの場合のそれに近づく可能性もある。

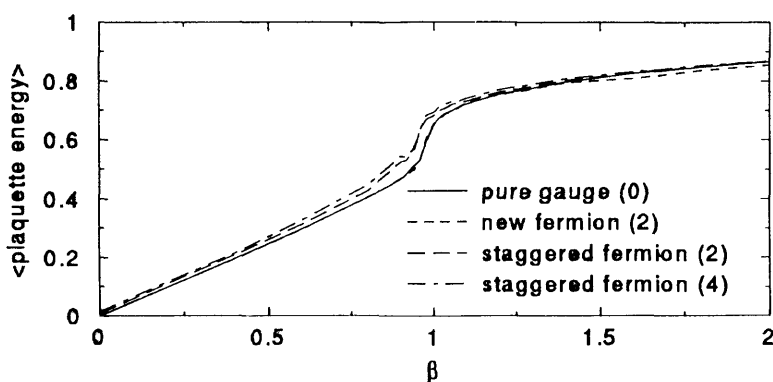


図 6: 1 + 3 次元 QED におけるプラケット・エネルギーのフレーバー依存性

## 4 結論

今回、我々は我々が提案した新しいフェルミオン作用を用いて、格子 QED におけるフレーバー数依存性についての研究を行なった。我々の新しい作用は Wilson フェルミオンのようなパラメータを必要とすることなくカイラル性を調査でき、特に 1+3 次元において staggered フェルミオン作用が作り出す 4 フレーバーの状況よりも現実的な 2 フレーバーの状況を直接扱うことが可能であるため、フレーバー数依存性について詳しく調査できることを期待したが、データが不十分で定量的にはっきりとしたことは結論付けるられない。しかしながら、1+1 次元、1+3 次元の両方においてフレーバー数が増えるにつれプラケット・エネルギーのラインが小さい  $\beta$ 、すなわち大きい結合定数、に移動することが確認できた、また、1+3 次元において、staggered フェルミオン作用を用い非自明な処方で我々の方法と同じ 2 フレーバーをもつ状態を作り出した場合のプラケット・エネルギーのラインがピュア・ゲージの場合のそれより左側にシフトしているのに対し、我々の新しいフェルミオン作用を用いて求めたプラケット・エネルギーのラインはピュア・ゲージの場合のそれとほぼ一致している、という結果は興味深い。1+3 次元 QED における相転移のフレーバー数依存性に対して新しいアプローチをができるように思う。

今後、サンプリングを増やし十分大きなサイズの格子で数値シミュレーションを実行し、正確にダイナミカルなフェルミオンが導入されたときの相転移近傍の振舞いを観測したい。今回、カイラル性については膨大なコンピュータ・メモリと時間を費やすため割愛したが、カイラル凝縮などのオーダー・パラメータを観測することは相転移点を決定する上で非常に有効である。

最後に我々の作用を  $SU(N)$  格子ゲージ理論に応用する場合を考える。 $SU(N)$  群には式

(21) での  $e^{i\theta}$  のような要素がないため、T-condition や GT-condition といった制限をリンク変数に与えなくても、行列式の期待値の収束性は良いことが予想される。実際、SU(3) ゲージ理論に対する数値シミュレーションからフェルミオン行列式の値は複素平面上で非常に小さな位相角を持つという結果が得られている。それゆえ、最終的な興味である QCD における相転移のフレーバー数依存性についての研究に対しても、我々の作用は有効であると期待する。

## 参考文献

- [1] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185**, 20 (1981); **B193**, 173 (1981).
- [2] K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974); *New Phenomena in Subnuclear Physics*, edited by A. Zichichi (Plenum, New York, 1977).
- [3] L. Susskind, Phys. Rev. D **16**, 3031 (1977).
- [4] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25**, 2649 (1982).
- [5] I. Horváth, Phys. Rev. Lett. **81**, 4063 (1998); W. Bietenholz, hep-lat/9901005.
- [6] A. Hayashi, T. Hashimoto, M. Horibe, and H. Yamamoto, Phys. Rev. D **55**, 2987 (1997).
- [7] M. Horibe, T. Hashimoto, A. Hayashi, and H. Yamamoto, Phys. Rev. D **56**, 6006 (1997).
- [8] A. Takami, T. Hashimoto, M. Horibe and A. Hayashi, hep-lat/0001011, Phys. Rev. D (in press).
- [9] A. Takami, T. Hashimoto, M. Horibe, and A. Hayashi hep-lat/0003006, Phys. Rev. D (in press).
- [10] H. J. Rothe, *LATTICE GAUGE THEORIES -AN INTRODUCTION-* (World Scientific, Singapore, 1992).